

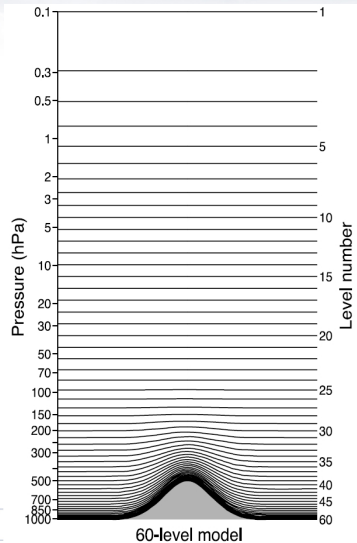
Discretización Vertical en la Dinámica del IFS

Álvaro Subías Díaz-Blanco

Agencia Estatal de Meteorología
Departamento de Desarrollo y Aplicaciones
Madrid, España

24 Octubre 2014

La **coordenada vertical híbrida** $\eta \in [0, 1]$ es una coordenada adaptada al terreno



η se define implícitamente a través de la presión hidrostática

$$\pi(x, y, \eta, t) = A(\eta) + B(\eta) \pi_s(x, y, t)$$

suvt1.F90

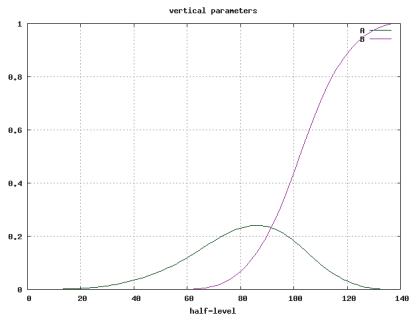
suvert.F90

donde

$$\begin{aligned} A(0) &= \pi_{\text{top}} & A(1) &= 0 \\ B(0) &= 0 & B(1) &= 1 \end{aligned}$$

La monotonicidad necesita [B]

$$\min_{x, y, t} \pi_s(x, y, t) > \max_{\eta \in [0, 1]} \left[-\frac{\frac{dA}{d\eta}}{\frac{dB}{d\eta}} \right]$$



Esta condición se comprueba en `facadi.F90` con $\pi_{\text{smin}} = 450\text{hPa}$ a través del test del Monte Everest (aunque la presión real es menor que π_{smin})

Niveles del Modelo: Construcción

relación entre A , B y η

$$\eta := \frac{A}{\pi_{00}} + B$$

m: estiramiento, determina en qué niveles de la coordenada vertical se tiene mayor resolución.

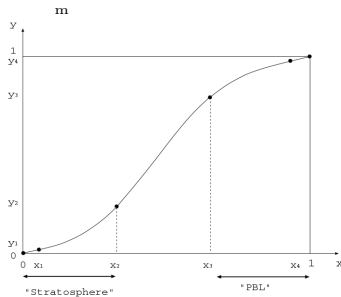
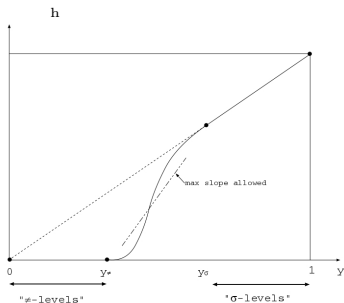
h: hibridación, cuando su valor es cero desaparece el efecto de la superficie $\pi(\eta) = \pi_{00} m(\eta)$

$$\begin{aligned} A(x) &= [m(x) - h(m(x))] \pi_{00} \\ B(x) &= h(m(x)) \end{aligned}$$

$$\pi(\eta) = \pi_{00} m(\eta) + (\pi_s - \pi_{00}) h(m(\eta))$$

$h(x) = 0$: niveles π
 $h(x) = x$: niveles σ

$\pi(\eta) = \pi_{00} m(\eta)$
 $\pi(\eta) = \pi_s m(\eta)$



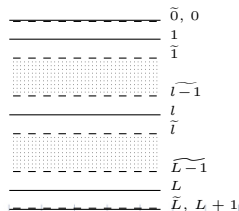
NFLEV G niveles definidos en rejilla alternada (stagger grid, suvert.F90).

half levels: YRVETA%VETAH, $\tilde{l} \in [0, L]$
flujos en interfaces

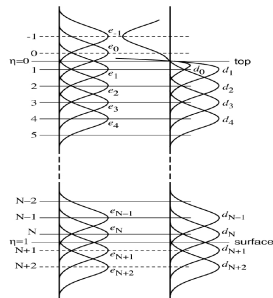
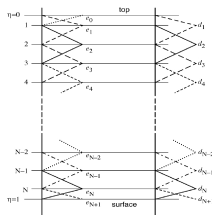
$$\begin{aligned} \eta_{\tilde{l}} &= \frac{\tilde{l}}{L} & \text{LREGETA}=.T. \\ \eta_{\tilde{l}} &= \frac{A_{\tilde{l}}}{\pi_{oo}} + B_{\tilde{l}} & \text{LREGETA}=.F. \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} A_{\tilde{l}} & \text{YRVAB\%VAH} \\ B_{\tilde{l}} & \text{YRVAB\%VBH} \\ \pi_{oo} & \text{YRVAB\%VP00} \end{cases}$$

full levels: YRVETA%VETAF, $l \in [0, L + 1]$
variables del modelo

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \eta_{\tilde{0}} \\ \eta_l &= \frac{1}{2}[\eta_{\tilde{l}} + \eta_{\widetilde{l-1}}] & l \in [1, L] \\ \eta_{L+1} &= \eta_{\widetilde{L}} \end{aligned}$$



Los elementos finitos han sido implementados exitosamente en el IFS en el **modelo hidrostático** por A. Untch y M. Hortal [UH], a través de B-splines lineales y cúbicos usando el **método de Galerkin**.



Todas las variables se definen en **full-levels** de modo que desaparece el staggering y son necesarias un menor número de interpolaciones el método semi-lagrangiano (lavent.F90)

Sólo en el modelo hidrostático, el switch principal es **LVERTFE**.

La integral de una función es

$$F(\eta) = \int_0^\eta ds f(s)$$

expandimos sobre funciones base

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \sum_{i \in M} c_i e_i & \{e_i(\eta)\}_{i \in M} \\ \tilde{F} &= \sum_{j \in N} C_j d_j & \{d_j(\eta)\}_{j \in N}\end{aligned}$$

y tratamos con operadores de proyección

$$\begin{aligned}\tilde{f}_l &:= \tilde{f}(\eta_l) = \sum_{i \in M} S_{li} c_i & S_{li} &:= e_i(\eta_l) \\ \tilde{F}_l &:= \tilde{F}(\eta_l) = \sum_{j \in N} P_{lj} C_j & P_{lj} &:= d_j(\eta_l)\end{aligned}$$

a partir de la equivalencia

$$\sum_{j \in N} C_j d_j(\eta) + R \equiv \sum_{i \in M} c_i \int_0^\eta ds e_i(s)$$

proyectamos en d_k con funciones test Π_k

$$\Pi_k(g) = \int_0^1 d\eta d_k(\eta) g(\eta)$$

es necesario que $\Pi_k(R) \simeq 0$, definimos las matrices

$$\mathcal{A}_{kj} := \Pi_k(d_j) \quad \mathcal{B}_{ki} := \Pi_k \left(\int_0^\eta ds e_i(s) \right)$$

el operador vertical se calcula en `suvertfe.F90` y se almacena en **RINTE**

$$\tilde{F} = \mathcal{P} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B} S^{-1} \tilde{f}$$

la integración vertical se realiza en `verint.F90`

condiciones de consistencia en full-levels (**suvert.F90**) para

A (**YRVAB%VAF**)

B (**YRVAB%VBF**)

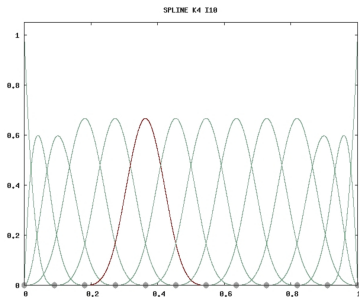
$$\begin{aligned}\pi &= A(\eta) + \pi_s B(\eta) \\ m &= \frac{dA}{d\eta} + \pi_s \frac{dB}{d\eta}\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{d\pi}{d\eta} = \pi_s \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{dA}{d\eta} = 0 \quad \int_0^1 \frac{dB}{d\eta} = 1$$

En el **modelo no hidrostático** aparece una ligadura que no está presente el hidrostático (**constraint C1**). En diferencias finitas esta ligadura se mantiene, ¿podremos mantenerla también en elementos finitos?

P. Smolíková y J. Vivoda han desarrollado una discretización en FE utilizando **B-splines** calculados con el algoritmo de de Boor y el método de Galerkin. La constraint C1 no se resuelve si no que se relaja mediante un **método iterativo**

$$N_{ik}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$



Los **nodos** son una colección no decreciente de puntos relacionados con los niveles. B-Splines de orden 0

$$N_{i1}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Actualmente estamos trabajando para resolver la constraint C1 en un modelo **NHVFE**

Operadores VFE basados en **propiedades analíticas de los B-splines** en lugar del método de Galerkin. Los B-splines forman una **partición de la unidad** de modo que las funciones constantes pueden ser escritas como combinaciones lineales de funciones base

$$\sum_i N_{ik}(t) = 1$$

Los B-splines forman un conjunto cerrado bajo las operaciones de **derivación e integración**

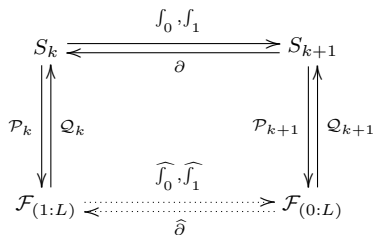
$$\frac{\partial}{\partial t} N_{ik} = (k-1) \left[\frac{N_{i,k-1}}{t_{i+k-1}-t_i} - \frac{N_{i+1,k-1}}{t_{i+k}-t_{i+1}} \right]$$

$$\int_0^t N_{ik} = \frac{t_{i+k}-t_i}{k} \sum_{i \leq s} N_{s,k+1}$$

construimos los operadores a partir del siguiente **diagrama conmutativo**

$$S_k \begin{array}{c} \xleftarrow{\int_0, \int_1} \\ \xrightarrow{\partial} \end{array} S_{k+1}$$

construimos los operadores a partir del siguiente **diagrama conmutativo**



aseguramos la **invertibilidad** entre los operadores integral y derivada (lo que puede ser considerado como una constraint) en el espacio de funciones de punto de rejilla $\widehat{\partial}, \widehat{\int_0}, \widehat{\int_1}$ (EN DESARROLLO)

Ecuaciones del modelo no hidrostático [La, Bb]

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{RT}{p} \vec{\nabla} p + \frac{1}{m} \partial_{\eta} p \vec{\nabla} \phi = \vec{V}$$

$$\frac{dw}{dt} + g[1 - \frac{1}{m} \partial_{\eta} p] = W$$

$$\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{pc_p} \frac{dp}{dt} = \frac{Q}{c_p}$$

$$\frac{dp}{dt} + \frac{c_p}{c_v} p D_3 = \frac{Q_p}{c_v T}$$

$$\partial_t m + \vec{\nabla} \cdot (m \vec{v}) + \partial_{\eta} (m \dot{\eta}) = 0$$

$$\frac{d\phi}{dt} = gw$$

$$\partial_{\eta} \phi = -m \frac{RT}{p}$$

$$D_3 := \vec{\nabla} \vec{v} + \frac{p}{mRT} (\vec{\nabla} \phi) (\partial_{\eta} \vec{v}) - \frac{gp}{mRT} \partial_{\eta} w$$

π : presión hidrostática

p : presión real

T : temperatura virtual

R : constante de los gases aire seco

ϕ : geopotencial

D_3 : divergencia 3D

η : coordenada vertical híbrida

$\vec{\nabla}$: gradiente cuasi-horizontal η cte.

\vec{V}, W, Q : componentes físicos del forzamiento

$m := \partial_{\eta} \pi$

$w := \frac{dz}{dt}$

$\omega := \frac{dp}{dt}$

nuevas variables de pronóstico: desviación de la presión hidrostática $\hat{\mathcal{P}}$ y divergencial pseudovertical \hat{d}

$$\hat{\mathcal{P}} := \frac{p - \pi}{\pi^*(\eta)} \quad \text{NPDVAR}$$

$$\hat{d} := -g \frac{\rho^*(\eta)}{m^*(\eta)} \partial_{\eta} w \quad \text{NVDVAR}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &+ \frac{RT}{p} \vec{\nabla} p + \frac{1}{m} \partial_{\eta} p \vec{\nabla} \phi = \vec{V} \\ \frac{d(\hat{d})}{dt} &+ g^2 \frac{\rho^*}{m^*} \partial_{\eta} \left(\frac{1}{m} \partial_{\eta} (\pi^* \hat{\mathcal{P}}) \right) - g \frac{\rho^*}{m^*} (\partial_{\eta} \vec{v}) \vec{\nabla} w \\ &+ \hat{d} \frac{1}{m} \partial_{\eta} (\dot{\eta} m) - \hat{d} \dot{\eta} \partial_{\eta} (\ln \rho^*) \\ &- g \rho^* (\dot{\eta} m) \frac{1}{m^*} \partial_{\eta} \left(\frac{1}{m} \partial_{\eta} w \right) \\ &+ g \rho^* \dot{\eta} \partial_{\eta} \left(\frac{1}{m^*} \partial_{\eta} w \right) = -g \frac{\rho^*}{m^*} \partial_{\eta} W \\ \frac{dT}{dt} &+ \frac{RT}{c_v} D_3 = \frac{Q}{c_v} \\ \frac{d\hat{\mathcal{P}}}{dt} &+ \frac{c_p}{c_v} \frac{p}{\pi^*} D_3 + \frac{\dot{\pi}}{\pi^*} + \frac{\hat{\mathcal{P}}}{\pi^*} \dot{\eta} m^* = \frac{Qp}{c_v T \pi^*} \\ \partial_t m &+ \vec{\nabla} (m \vec{v}) + \partial_{\eta} (m \dot{\eta}) = 0 \\ \frac{d\phi}{dt} &= g w \\ \partial_{\eta} \phi &= -m \frac{RT}{\pi + \pi^* \hat{\mathcal{P}}} \\ D_3 &= \vec{\nabla} \vec{v} + \frac{p}{mRT} (\vec{\nabla} \phi) (\partial_{\eta} \vec{v}) - \frac{gp}{mRT} \partial_{\eta} w \end{aligned}$$

las definiciones se hacen en referencia a un estado básico *

$$m^*(\eta) := \partial_{\eta} \pi^*$$

$$\rho^*(\eta) := \frac{\pi^*}{R_d T^*}$$

modelo explícito: ecuaciones fundamentales

$$\partial_t X = \mathcal{M}(X)$$

modelo semi-implícito: en las ecuaciones fundamentales se añade un término lineal que actúa como filtro de las ondas elásticas que viajan a gran velocidad en cualquier dirección [BM]. \bar{X} es un promedio temporal de X

$$\partial_t X = \mathcal{M}(X) + \beta \mathcal{L}(\bar{X} - X)$$

discretizando en 3 pasos de tiempo (mejorado en SETTLS 2TL)

$$X^+ = X^- + 2(\Delta t)\mathcal{M}(X^0) + \beta(\Delta t)\mathcal{L}(X^+ - 2X^0 + X^-)$$

dados los estados X^0, X^- , el estado pronóstico X^+ es aquel que satisface la ecuación implícita

$$[1 - \beta(\Delta t)\mathcal{L}] X^+ = RHS(X^0, X^-)$$

establecemos un estado básico X^{*j}

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u^* & := & 0 \\ v^* & := & 0 \\ w^* & := & 0 \\ D^* & := & 0 \\ \hat{d}^* & := & 0 \\ q^* & := & 0 \\ p^* & := & 0 \\ T^* & := & \text{cte.} \\ \phi_s^* & := & \text{cte.} \\ \pi_s^* & := & \text{cte.} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} c_v^* & = & c_{vd}^* \\ c_p^* & = & c_{pd}^* \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \pi^*(\eta) & = & A(\eta) + B(\eta)\pi_s^* \\ m^*(\eta) & = & \partial_\eta A + \partial_\eta B \pi_s^* \\ p^*(\eta) & = & \pi^*(\eta) \end{array} \right\}$$

obtenemos el modelo lineal alrededor del estado básico $X^j = X^{*j} + X'^j$. Cuando el valor de referencia es cero se omite la notación prima

$$\partial_t X'^j = \left. \frac{\partial \mathcal{M}^j}{\partial X^k} \right|_{X^*} X'^k$$

resolvemos el sistema lineal previa eliminación de variables (spnhsi.F90)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} D^+ & := & \beta(\Delta t) \left[-R_d \mathcal{G}^* \Delta T'^+ + g_H \mathcal{G}^* \Delta \hat{P}^+ - R_d T^* \Delta \hat{P}^+ - \frac{R_d T^*}{\pi_s^*} \Delta \pi_s'^+ - \Delta \phi_s'^+ \right] + R_D \\ T'^+ & := & \beta(\Delta t) \left[-\frac{R_d T^*}{c_{vd}} (D^+ + \hat{d}^+) \right] + R_T \\ \pi_s'^+ & := & \beta(\Delta t) \left[-\pi_s^* \mathcal{N}^* D^+ \right] + R_{\pi_s} \\ \hat{P}^+ & := & \beta(\Delta t) \left[-\frac{c_{pd}}{c_{vd}} (D^+ + \hat{d}^+) + \mathcal{S}^* D^+ \right] + R_{\hat{P}} \\ \hat{d}^+ & := & \beta(\Delta t) \left[-\frac{g}{H} \mathcal{L}^* \hat{P}^+ \right] + R_{\hat{d}} \end{array} \right\}$$

derivación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial^* := \pi^* \frac{\partial}{\partial \pi^*} \\ \mathcal{L}^* := \partial^* (\partial^* + 1) \end{array} \right\}$$

integración:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}^* f := \int_{\pi^*}^{\pi_s^*} f \frac{d\pi^*}{\pi^*} \\ \mathcal{S}^* f := \frac{1}{\pi^*} \int_0^{\pi^*} f d\pi^* \\ \mathcal{N}^* f := \frac{1}{\pi_s^*} \int_0^{\pi_s^*} f d\pi^* \end{array} \right\}$$

ligaduras:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_1^* := \mathcal{G}^* \mathcal{S}^* - \mathcal{G}^* - \mathcal{S}^* + \mathcal{N}^* \\ \mathcal{A}_2^* := \mathcal{S}^* \mathcal{G}^* - \frac{c p d}{c_v d} [\mathcal{G}^* + \mathcal{S}^*] \end{array} \right\}$$

eliminando variables se llega al modelo lineal simplificado

$$\left\{ \begin{array}{l} [1 - \beta^2(\Delta t)^2 \frac{c^2}{H^2} \mathcal{L}^*] \hat{d}^+ = \beta^2(\Delta t)^2 \frac{\mathcal{L}^*}{H^2} [c^2 - gH \mathcal{S}^*] D^+ + R_1 \\ \beta^2(\Delta t)^2 [c^2 - gH \mathcal{G}^*] \Delta \hat{d}^+ = [1 - \beta^2(\Delta t)^2 c^2 \Delta \{1 - \frac{c_{vd}}{c_{pd}} \mathcal{A}_1^*\}] D^+ + R_2 \end{array} \right\}$$

realizando la combinación $R_3 := \left[-\frac{1}{c^2} + \beta^2(\Delta t)^2 \Delta\right] R_1 + \beta^2(\Delta t)^2 \frac{\mathcal{L}^*}{H^2} \left[1 - \frac{gH}{c^2} \mathcal{S}^*\right] R_2$

$$\left[-\frac{1}{c^2} + \beta^2(\Delta t)^2 \left\{\Delta + \frac{\mathcal{L}^*}{H^2}\right\} + \beta^4(\Delta t)^4 \frac{g^2}{c^2} \mathcal{L}^* \mathcal{A}_2^* \Delta\right] \hat{d}^+ + \beta^4(\Delta t)^4 \Delta \frac{c_{vd}}{c_{pd}} \left[1 - \frac{c_{vd}}{c_{pd}} \mathcal{S}^*\right] \mathcal{A}_1^* D^+ = R_3$$

a nivel analítico se satisfacen las constraints

C1	C2
$\mathcal{A}_1^* = 0$	$\frac{g^2}{c^2} \mathcal{L}^* \mathcal{A}_2^* = N^2$

ecuación de estructura: el core del modelo es una ecuación de pronóstico para una única variable

$$\left[-\frac{1}{c^2} + \beta^2(\Delta t)^2 \left\{\Delta + \frac{\mathcal{L}^*}{H^2}\right\} + \beta^4(\Delta t)^4 N^2 \Delta\right] \hat{d}^+ = R_3$$

operadores discretizados ($\delta\pi_l^* := \pi_l^* - \widetilde{\pi_{l-1}^*}$ **SIDELP**)

$$(\mathbf{G}^* f)_l := \sum_{k=l+1}^L \delta_k^* f_k + \alpha_l^* f_l \quad \text{sigam.F90}$$

$$(\mathbf{S}^* f)_l := \frac{1}{\pi_l^*} \sum_{k=1}^{l-1} \delta\pi_k^* f_k + \beta_l^* f_l \quad \text{sitnu.F90}$$

$$(\mathbf{N}^* f)_l := \frac{1}{\pi_{\bar{L}}^*} \sum_{k=1}^L \delta\pi_k^* f_k \quad \text{sitnu.F90}$$

$$(\mathbf{L}^* f)_l := A_l^* f_{l-1} + B_l^* f_l + C_l^* f_{l+1} \quad \text{siseve.F90}$$

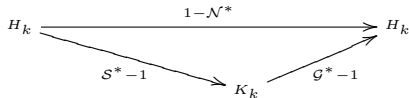
los coeficientes α_l^* **SIALPH**, β_l^* , δ_k^* **SILNPR** se eligen para satisfacer la **constraint C1**

$$\mathbf{A}_1^* = 0 \quad \text{si_cccor.F90}$$

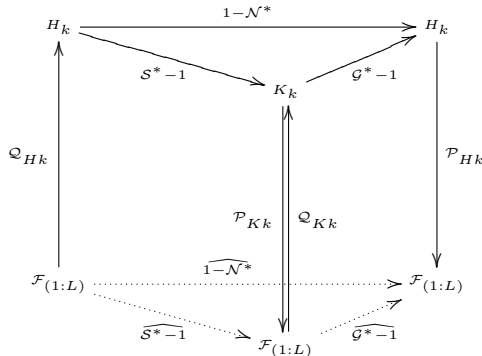
la **constraint C2** analítica es $\mathcal{T}^* := \left(\frac{g}{Nc}\right)^2 \mathcal{L}^* \mathcal{A}_2^* \equiv 1$, en la versión FD \mathbf{T}^* es tridiagonal

$$\left[-\frac{1}{c^2} + \beta^2 (\Delta t)^2 \left\{ \Delta + \frac{\mathbf{L}^*}{H^2} \right\} + \beta^4 (\Delta t)^4 N^2 \mathbf{T}^* \Delta \right] \hat{d}^+ = RHS$$

la factorización $(\mathcal{G}^* - 1)(\mathcal{S}^* - 1) = (1 - \mathcal{N}^*)$ permite establecer el siguiente diagrama conmutativo en el espacio de funciones base



la **factorización** $(\mathcal{G}^* - 1)(\mathcal{S}^* - 1) = (1 - \mathcal{N}^*)$ permite establecer el siguiente diagrama conmutativo en el espacio de funciones base



y en el espacio de punto de rejilla (EN DESARROLLO)

desarrollamos la ecuación de estructura

$$\left[1 - c^2 \beta^2 (\Delta t)^2 \frac{\mathbf{L}^*}{H^2} - c^2 \beta^2 (\Delta t)^2 \Delta - c^2 \beta^4 (\Delta t)^4 N^2 \mathbf{T}^* \Delta \right] \hat{d}^+ = RHS$$

definimos \mathbf{F} (**SIFAC**) y su inversa (**SIFACI**)

$$\mathbf{F} := 1 - c^2 \beta^2 (\Delta t)^2 \frac{\mathbf{L}^*}{H^2}$$

y la matriz \mathbf{B} (**SIB**)

$$\mathbf{B} := c^2 \mathbf{F}^{-1} \left[1 + \beta^2 (\Delta t)^2 N^2 \mathbf{T}^* \right]$$

sunhsi.F90
sunhbm.F90

para la estabilidad del modelo es necesaria la diagonalización $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}$ con autovalores reales y positivos \mathbf{A} (**SIVP**). Las matrices de cambio de base son \mathbf{Q} (**SIMI**), \mathbf{Q}^{-1} (**SIMO**).

finalmente obtenemos la ecuación de Helmholtz dependiente de operadores diagonales \mathbf{A} , Δ y que por tanto se convierte en una ecuación algebraica

$$\left[1 - \beta^2 (\Delta t)^2 \mathbf{A} \Delta \right] \mathbf{Q} \hat{d}^+ = RHS'$$

sunhheg.F90

- **VERINT** (kproma,kstart,kprof,kflev,pin,POUT,ktype)

$$\int_{ktype}^{\eta} f(s) ds \quad \Rightarrow \quad [POUT] = [PIN] [RINTE]^T$$

- **SIGAM** (klev,klon,PD,pt,psp,knlon,kflevg)

$$\gamma = R_d \mathcal{G}^*$$

$$\mu = R_d T^*$$

$$[PD] = \gamma [PT] + \mu [PSP]$$

- **SITNU** (klev,klon,pd,PT,PSP,knlon)

$$\tau = \frac{R_d T^*}{c_{pd}} \mathcal{S}^*$$

$$\nu = \mathcal{N}^*$$

$$[PT] = \tau [PD]$$

$$[PSP] = \nu [PD]$$

- **SI_CCCOR** (klev,klon,knlon,pin,POU)

$$[POU] = R_d T^* \mathcal{A}_1^* [PIN]$$

- **SISEVE** (klev,klon,pv1,PV2,knlon)

$$[PV2] = \mathcal{L}^* [PV1]$$

- **SIDD** (klev,klon,PDH,PDV,prnh,pt,psp,knlon)

$$[PDH] = \gamma [PT] + \mu [PSP] + \{\mu - T^*\gamma\} [PRNH]$$

$$[PDV] = \frac{g^2}{R_d T_a^*} \mathcal{L}^* [PRNH]$$



Bubnová R., G. Hello, P. Bénard, J-F. Geleyn, 1995:

Integration of the Fully Elastic Equations Cast in the Hydrostatic Pressure Terrain-Following Coordinate in the Framework of the ARPEGE/Aladin NWP System.

Mon. Wea. Rev., 123, 515-535.



Untch A., M. Hortal, 2004:

A Finite-element Scheme for the Vertical Discretization in the Semi-lagrangian Version of the ECMWF Forecast Model.

Q. J. R. Meteorol. Soc. 130, pp. 1505-1530



IFS Documentation - Cy40r1. Operational implementation 22 November 2013

Dynamics and Numerical Procedures

http://www.ecmwf.int/sites/default/files/IFS_CY40R1_Part3.pdf



Bénard P., J. Masek, 2011:

Scientific Documentation for ALADIN-NH Dynamical Kernel

<http://www.cnrm.meteo.fr/gmapdoc/IMG/pdf/designv3-1-0.pdf>



Yessad K., 2014:

Semi-implicit spectral computations and predictor-corrector schemes in the cycle 39T1 of Arpege/IFS.

<http://www.cnrm.meteo.fr/gmapdoc//IMG/pdf/yksi40t1.pdf>



Kasahara A., 1974:

Various Vertical Coordinate Systems Used for Numerical Weather Prediction.

Mon. Wea. Rev., 102, 509-522.



Laprise R., 1992:

The Euler Equations of Motion with Hydrostatic Pressure as an Independent Variable.

Mon. Wea. Rev., 120, 197-207.



Bénard, 2008:

Design of the hybrid vertical coordinate η (case of a domain with $\pi_{top} = 0$)

<http://www.cnrm.meteo.fr/gmapdoc//IMG/pdf/memoeta0.pdf>